

УДК 519.713, 511.4, 517.938

©2018. А.Н. Курганский, И. Потапов

ГРАФЫ ДЕ БРЁЙНА И СТЕПЕНИ ЧИСЛА $3/2$

Рассматривается множество $\mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ бесконечных в обе стороны слов ξ в алфавите $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ с разделяющим на целую левую $\lfloor \xi \rfloor$ дробную правую $\{\xi\}$ части знаком (запятой). Для таких слов определено умножение на целые числа и деление на 6 как умножение и деление столбиком в системе счисления 6. В работе развивается конечно-автоматный подход анализа последовательностей вида $(\lfloor \xi (\frac{3}{2})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ для слов $\xi \in \mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ совпадающих по ряду свойств с Z -числами в $3/2$ -проблеме Малера. Каждая такая последовательность Z -слов, записываемых друг под другом так, чтобы одинаковые разряды находились в одном столбце, представляет собой бесконечное 2-мерное слово в алфавите \mathbb{Z}_6 . Конечно-автоматное представление столбцов целой части таких 2-мерных Z -слов обладают структурными свойствами графа де Брёйна. Такое представление доставляет ряд достаточных условий пустоты множества Z -чисел. Подход основывается на ряде результатов работы [1], авторы которой применяют клеточные автоматы для анализа последовательностей $(\{\xi (\frac{3}{2})^n\})_{n \in \mathbb{Z}}$, где $\xi \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: распределение по модулю 1, Z -числа, конечные автоматы, кусочно-аффинные отображения

1 Введение

Известно [10], что последовательность $\{\xi \alpha^i\}$, $i \in \mathbb{N}$, равномерно распределена в интервале $[0, 1)$ для почти всех положительных $\xi \in \mathbb{R}$, где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x . При этом существуют числа ξ , для которых указанная последовательность ведёт себя иначе. Отсюда возникают задачи о свойствах $\{\xi \alpha^i\}$ для конкретных ξ и α , а также обратные задачи о существовании ξ и α , реализующих $\{\xi \alpha^i\}$ с заданными свойствами. Примером обратной задачи является открытая $3/2$ -проблема Малера [9] о существовании Z -чисел ξ таких, что последовательность $\{\xi (3/2)^i\}$, $i \in \mathbb{N}$, полностью лежит в интервале $[0, 1/2)$.

В работе [1], развивающей результаты работ [3, 4, 5, 6], рассматривается множество $Z_{p/q}(S)$ таких ξ , что последовательность $\{\xi (3/2)^i\}$ полностью лежит в S , где $S \subseteq [0, 1)$ является некоторым конечным объединением интервалов, $p, q \in \mathbb{N}$, и для него в контексте $3/2$ -проблемы Малера ставится задача о поиске как можно большего множества S , при котором $Z_{p/q}(S) = \emptyset$, и как можно меньшего множества S , при котором $Z_{p/q}(S) \neq \emptyset$. Подходы к решению данной задачи основываются на исследовании клеточных автоматов, связь которых с $3/2$ -проблемой Малера устанавливается в [7, 8].

В настоящей работе в рамках развития результатов работы [2] предлагается конечно-автоматный подход к проблематике $3/2$ -проблемы Малера. Рассматривается множество $\mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ бесконечных в обе стороны слов ξ в алфавите $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ с разделяющим на условно целую $\lfloor \xi \rfloor$ (левую) и дробную $\{\xi\}$ (правую) части знаком (запятой). Для таких слов определено умножение на целые числа и де-

ление на 6, содержательно совпадающее с умножением и делением столбиком в системе счисления 6. В работе развивается конечно-автоматный метод анализа последовательностей вида $(\lfloor \xi (\frac{3}{2})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ для слов $\xi \in \mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ совпадающих по ряду свойств с Z -числами в 3/2-проблеме Малера. Такая последовательность Z -слов, записанных друг под другом так, чтобы одинаковые разряды находились в одном столбце, представляет собой бесконечное 2-мерное слово в алфавите \mathbb{Z}_6 . Конечно-автоматное представление столбцов целой части таких 2-мерных Z -слов обладают структурными свойствами графа де Брёйна. Такое представление доставляет ряд наглядных достаточных условий пустоты множества Z -чисел. Подход основывается на идее предложения 2.5 работы [1], авторы которой применяют клеточные автоматы для анализа последовательностей $(\{\xi (\frac{3}{2})^n\})_{n \in \mathbb{Z}}$, где $\xi \in \mathbb{R}$. Обобщенная форма предложения 2.5 работы [1] в настоящей работе представлена теоремой 6.

2 Обозначения и определения

Как обычно, через \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{P} , \mathbb{Q} and \mathbb{R} обозначаем натуральные, целые, простые, рациональные и действительные числа. Используем следующие сокращения и обозначения: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n^+ = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $\mathbb{Z}_n^- = \{-(n-1), (n-2), \dots, -2, -1\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$, $\mathbb{Z}^\pm = \mathbb{Z}$.

Фигурные скобки используются для записи множеств, а также в записи $\{x\}$ дробной части числа x . Через $\lfloor x \rfloor$ обозначаем наибольшее целое число меньшее x . Через 2^M обозначаем булеан множества M . Если $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : X' \rightarrow Y'$, то gf обозначает суперпозицию функций: $gf : X \rightarrow Z$, а $f \times h$ декартово произведение функций. Если $A \subseteq X$, то $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$.

Для работы с 1-мерными и 2-мерными словами будут использоваться следующие средства выделения их фрагментов с помощью индексов, частично заимствованные из языка Python, инструментами которого проводились вычислительные эксперименты данной работы. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a < b$, $c < d$. Определим следующие функции:

$$\begin{aligned} [a : b] : \mathbb{Z}_{b-a} &\rightarrow \{a, a+1, \dots, b-1\}, & [a : b](x) &= x + a, \\ [a : +\infty] : \mathbb{Z}^+ &\rightarrow \{x \in \mathbb{Z} | x \geq a\}, & [a : +\infty](x) &= x + a, \\ [-\infty : b] : \mathbb{Z}^- &\rightarrow \{x \in \mathbb{Z} | x < b\}, & [-\infty : b](x) &= x + b, \\ [a : b, c : d] &= [a : b] \times [c : d]. \end{aligned}$$

Через $[\cdot]$ обозначим тождественное отображение на \mathbb{Z}^\pm . Также используем сокращения записи: $[a] = [a : a+1]$, $[\cdot : b] = [-\infty : b]$, $[a : \cdot] = [a : +\infty]$.

Множество $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ рассматриваем как модуль над кольцом \mathbb{Z} . Элементы \mathbb{Z}^2 представляем вектор-столбцами. В отображениях вида $f : \mathbb{Z} \rightarrow X$, $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow X$ элементы из \mathbb{Z} и \mathbb{Z}^2 называем координатами их образов в X .

Одномерные слова. Под одномерным словом в алфавите A мы понимаем то же, что и в теории формальных языков. Однако, поскольку в работе речь идёт о

словах в алфавите цифр, то есть о числах, в том числе с разделяющим целую и дробную части знаком, то слово $w \in A^*$ длины n мы также будем интерпретировать как функцию $w : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$. Например, пусть $A = \mathbb{Z}_{10}$ и $w = 314159$. Тогда $w(0) = 9$, $w(5) = 3$, а $w[1 : 4] = 415$. Под бесконечными словами мы понимаем отображения: $w : \mathbb{Z} \rightarrow A$ (бесконечное в обе стороны), $w : \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ (бесконечное влево), $w : \mathbb{Z}^- \rightarrow A$ (бесконечное вправо). К примеру, число $w = 3.14159$ мы понимаем как отображение из $\mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_6^-$ в алфавит цифр. В частности, $w(-2) = 4$. Слова любой размерности в алфавите A будем называть A -словами. Поскольку в работе речь идёт в основном о \mathbb{Z}_6 -словах, то мы будем опускать указание на алфавит, когда он понятен из контекста.

Двумерные слова. Пусть $K \subseteq \mathbb{Z}^2$. Под 2-мерным словом u в алфавите A понимаем любое отображение $u : K \rightarrow A$. Если K конечное или бесконечное, то u называется, соответственно, конечным или бесконечным.

Под конечным 2-мерным прямоугольным словом u размера $n \times m$ в алфавите A понимаем отображение $u : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \rightarrow A$. Так как в работе под словами понимаются числовые объекты, то мы используем такую индексацию цифр слова u :

$$u = \begin{pmatrix} u_{0,m-1} & u_{0,m-2} & \dots & u_{0,0} \\ u_{1,m-1} & u_{1,m-2} & \dots & u_{1,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,m-1} & u_{n-1,m-2} & \dots & u_{n-1,0} \end{pmatrix}.$$

Понимаем, что $u(i, j) = u[i, j] = u_{i,j}$, при этом $u(i, j)$ является цифрой, а $u[i, j]$ однобуквенным словом.

Бесконечными прямоугольными 2-мерными словами являются следующие отображения: $u : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}^\sigma \rightarrow A$, $u : \mathbb{Z}^\sigma \times \mathbb{Z}_m \rightarrow A$, $u : \mathbb{Z}^\sigma \times \mathbb{Z}^{\sigma'} \rightarrow A$, где $\sigma, \sigma' \in \{-, +, \pm\}$. Прямоугольным подсловом (фрагментом) размера $n \times m$ 2-мерного слова u называем суперпозицию $u[i : i+n, j : j+m]$ отображения u и отображения $[i : i+n, j : j+m]$ для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $x \in \mathbb{Z}_6$. Под x^n , $x^{\pm\omega}$, $x^{+\omega}$, $x^{-\omega}$ понимаем следующие всюду определенные слова: $x^n : \mathbb{Z}_n \rightarrow \{x\}$, $x^{\pm\omega} : \mathbb{Z}^\pm \rightarrow \{x\}$, $x^{-\omega} : \mathbb{Z}^- \rightarrow \{x\}$, $x^{+\omega} : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{x\}$. Например, $0^5 = 00000$, $0^{+\omega} = \dots 000$, $0^{-\omega} = 000 \dots$, $0^{\pm\omega} = \dots 0, 0 \dots$, где запятая в выражении для $0^{\pm\omega}$ разделяет условные дробную (справа) и целую (слева) части.

ЗАМЕЧАНИЕ. Запись слова $w = a_{n-1}a_{n-1} \dots a_0$, $a_i \in A$, мы понимаем как функцию $w : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$ такую, что $w(i) = w[i] = a_i$. В строковой записи $w = a_{n-1}a_{n-1} \dots a_0$ слова $w : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$ начало координат мы приписываем её крайнему правому символу. Таким образом, мы используем принятую для целых чисел нумерацию цифр. Исключения будут оговариваться. Например, одним из способов указания на другую нумерацию будет разделяющий на целую и дробную часть числа знак. Исходя из сказанного, должно быть понятно, если это важно, как происходит нумерация цифр при конкатенации или сцеплении слов. Операция сцепления слов определена ниже.

Под транспонированием слова u понимаем такое слово u^T , что $u^T[i, j] = u[j, i]$. Вообще, для прямоугольных 2-мерных слов заимствуем термины из языка матриц.

Горизонтальное сцепление слов. Наряду с конкатенацией в работе используется операция сцепления слов. Пусть слова $u = (v_1 v_2 \dots v_n)$ и $u' = (w_1 w_2 \dots w_m)$ имеют соответственно размеры $r \times n$ и $r \times m$, где v_i и w_j r -мерные столбцы. Если $v_n = w_1$, то $u \circ u' = (v_1 v_2 \dots v_n w_2 \dots w_m)$, иначе $u \circ u'$ не определено. Операцию \circ назовём горизонтальным сцеплением слов. Для примера: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Пусть A и B множества слов, тогда $A \circ B = \{a \circ b | a \in A, b \in B\}$ и

$$A^{1^\circ} = A, \quad A^{n^\circ} = A^{(n-1)^\circ} \circ A,$$

$$A^{-\omega^\circ} = A \circ A \circ \dots, \quad A^{+\omega^\circ} = \dots \circ A \circ A,$$

$$A^{\pm\omega^\circ} = A^{+\omega^\circ} \circ A^{-\omega^\circ} = \dots \circ A \circ A \circ \dots$$

В $A^{\pm\omega^\circ}$ по умолчанию, если не оговаривается другое, подразумеваем привязку к нулевому разряду крайнего правого символа $A^{+\omega^\circ}$.

Вертикальное сцепление слов. Пусть слова u и u' имеют размеры $n \times r$ и $m \times r$. При этом последняя строка слова u совпадает с верхней строкой слова u' . Тогда вертикальное сцепление $u \bullet u'$ определяется так: $u \bullet u' = (u'^T \circ u^T)^T$. Для примера: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Как и для \circ определяем обозначения $A \bullet B$, A^{n^\bullet} , $A^{-\omega^\bullet}$, $A^{+\omega^\bullet}$, $A^{\pm\omega^\bullet}$.

Отношения одномерных слов в двумерных словах. Всякое множество двумерных слов W устанавливает отношения между столбцами и строками. Например, множество W двумерных слов вида $w : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \rightarrow A$ устанавливает бинарное отношение R на строках в алфавите A : $(w, w') \in R$, если $\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \in W$. Аналогично, множество W двумерных слов вида $w : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow A$ устанавливает бинарное отношение на столбцах в алфавите A . В работе не будет использоваться дополнительное обозначение для таких отношений. Само множество W будет интерпретироваться в зависимости от контекста как то или иное, но в явном виде оговариваемое, отношение между одномерными словами.

Универсальное множество слов $\mathcal{U}_{3/2}$. Для бесконечных в обе стороны \mathbb{Z}_6 -слов формально определяем операцию сложения и вычитания столбиком, а также умножение столбиком на целые числа и деление на 6 как это делается для чисел в 6-ричной системе счисления. Через $\mathcal{U}_{3/2}$ обозначаем множество всех 2-мерных слов $u : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, строки которых представляют собой последовательности 1-мерных \mathbb{Z}_6 -слов, получаемых друг из друга умножением предыдущего на $3/2$:

$$\mathcal{U}_{3/2} = \{u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_6 | \forall i \in \mathbb{Z} \quad u[i+1, :] = \frac{3}{2}u[i, :]\},$$

Обозначим:

$$\mathcal{U}_{3/2}^{n \times m} = \{u[i : i + n, j : j + m] \mid u \in \mathcal{U}_{3/2}, i, j \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 2}, \quad \mathcal{I} = \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы множеств $\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times n}$ и $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2}$ назовём, соответственно, горизонтальными и вертикальными n -мерными продукционными парами.

Пусть A – преобразование параллельного переноса пространства \mathbb{Z}^2 , то есть для некоторого $a \in \mathbb{Z}^2$ и любого $x \in \mathbb{Z}^2$ $A(x) = x + a$. Тогда для любого $u \in \mathcal{U}_{3/2}$ верно $uA \in \mathcal{U}_{3/2}$. Отсюда справедливы леммы 1, 2.

Лемма 1. *Выполняется равенство: $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times m} = \{u[0 : n, 0 : m] \mid u \in \mathcal{U}_{3/2}\}$.*

Лемма 2. *Для всех $i, j \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{U}_{3/2}[:, i] = \mathcal{U}_{3/2}[:, j]$, $\mathcal{U}_{3/2}[i, :] = \mathcal{U}_{3/2}[j, :]$.*

Пусть линейные преобразования $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ и $B : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ заданы матрицами: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, то есть $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix}$. Зафиксируем обозначения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}_{3/2} &= \{uA \mid u \in \mathcal{U}_{3/2}\}, \quad \dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{n \times m} = \{u[0 : n, 0 : m] \mid u \in \dot{\mathcal{U}}_{3/2}\}, \quad \dot{\mathcal{B}} = \dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times 2}, \\ \dot{\mathcal{U}}_{3/2} &= \{uB \mid u \in \mathcal{U}_{3/2}\}, \quad \dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{n \times m} = \{u[0 : n, 0 : m] \mid u \in \dot{\mathcal{U}}_{3/2}\}, \quad \dot{\mathcal{B}} = \dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times 2}, \\ \mathcal{B}^{00} &= \dot{\mathcal{B}}^{00} = \dot{\mathcal{B}}^{00} = \mathcal{I}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если для слов $u, w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ и некоторого аффинного преобразования $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ выполняется $w = uA$, то называем слова u и w конгруэнтными и пишем $u \sim w$. Отношение \sim является эквивалентностью. Пусть U, W множества слов. Если для любого $u \in U$ существует $w \in W$ такое, что $u \sim w$, и наоборот, то пишем $U \sim W$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы множеств $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n}$ и $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n}$ назовём диагонально, соответственно, восходящими и нисходящими n -мерными продукционными парами. Иногда элементы из $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n}$ просто называем диагональными продукционными парами.

V-таблицы и H-таблицы. Используем следующее обозначение:

$$\left[\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & \dots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & b_m & \dots & c_m \\ \hline a_{m+1} & b_{m+1} & \dots & c_{m+1} \\ a_{m+2} & b_{m+2} & \dots & c_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & c_n \end{array} \right] = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a_i & b_i & \dots & c_i \\ a_j & b_j & \dots & c_j \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m, \\ m < j \leq n \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m & b_{m+1} & b_{m+2} & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_n \end{array} \right] = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a_i & a_j \\ b_i & b_j \\ \dots & \dots \\ c_i & c_j \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m, \\ m < j \leq n \end{array} \right\} \quad (2)$$

Представление декартова произведения столбцов в форме левой части в (2) назовём V -таблицей, а декартово произведение строк в форме левой части в (1) назовём H -таблицей. В H -таблице T множество строк над разделяющей чертой (соответственно: под чертой) назовём верхней (нижней) компонентой таблицы и будем обозначать $\pi_U(T)$ ($\pi_O(T)$). В V -таблице T множество столбцов слева от разделяющей черты (соответственно: справа) назовём левой (правой) компонентой таблицы и будем обозначать $\pi_L(T)$ ($\pi_R(T)$).

Всякое конечное множество W горизонтальных продукционных пар представимо в виде объединения некоторых H -таблиц. Объединение таблиц мы обозначаем простым приписыванием их друг к другу, как показано, например, в леммах 5, 6, 8 и т.д. Если каждая строка в верхних (нижних) компонентах таблиц встречается только в одной H -таблице, то такое представление множества W назовём представлением в виде H -таблиц с уникальными верхними (нижними) компонентами. Аналогично, для множеств вертикальных продукционных пар используем представление V -таблицами с уникальными левыми и правыми компонентами.

Представляя множество продукционных пар с помощью H -таблиц с уникальной верхней (нижней) компонентой, мы подразумеваем, что различные таблицы различаются в нижних (верхних) компонентах, то есть нет таких двух таблиц, которые можно представить одной. Аналогичное подразумевается для V -таблиц.

Поскольку V -таблицы и H -таблицы являются формой представления множеств, соответственно, вертикальных и горизонтальных продукционных пар, то для H -таблиц очевидным образом определена операции горизонтального сцепления \circ , а для V -таблиц операция вертикального сцепления \bullet .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть W множество двумерных слов. Слово $w \in W$ назовём горизонтальным тупиком в W , если $W^{+\omega} \circ w \circ W^{-\omega} = \emptyset$. Слово $w \in W$ назовём вертикальным тупиком в W , если $W^{+\omega} \bullet w \bullet W^{-\omega} = \emptyset$.

Лемма 3. $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times m}$ не содержит горизонтальных и вертикальных тупиков.

Доказательство. Прямо следует из определения $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times m}$. \square

Лемма 4. Если W не содержит горизонтальных (вертикальных) тупиков, то $W^{n\circ}$ ($W^{n\bullet}$) не содержит горизонтальных (вертикальных) тупиков, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Непосредственно следует из определений. \square

3 n -Мерные продукционные пары

Пусть двумерное \mathbb{Z}_6 -слово

$$\begin{array}{cccccc} a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & & \\ c_4 & c_3 & c_2 & & & & \\ d_3 & & & & & & \end{array}$$

такое, что каждая её последующая строка получена из предыдущей умножением на $3/2$ и удалением крайних цифр согласно схеме слова. Леммы 5, 6, 8, 10 и 11 получены перебором всех слов $a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ в алфавите \mathbb{Z}_6 .

Лемма 5. Множество \mathcal{I} в форме H -таблиц с уникальными нижними компонентами имеет вид:

$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
---	---	--

Лемма 6. Множество \mathcal{B} в форме H -таблиц с уникальными нижними компонентами имеет вид:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \\ 5 & 5 \\ 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--

Рассмотрим 2-мерные продукционные пары \mathcal{B} в форме H -таблиц с уникальной нижней компонентой. Обозначим здесь это множество таблиц через $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Все 12 таблиц в нижней компоненте содержат ровно 2 строки. Среди них 8 таблиц в верхней компоненте содержат 3 строки, назовём их H -0235-таблицами, а 4 таблицы 6 строк, назовём их H -14-таблицами. H -14-таблицы в крайнем правом столбце верхней компоненты содержит все цифры $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Разобьём H -14-таблицы на строки следующим образом так, чтобы в крайнем правом столбце стояли либо $\{1, 3, 5\}$, либо $\{0, 2, 4\}$:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
---	---	---	---	---	---	---	---

В такой форме \mathcal{B} представляется с помощью 16 таблиц, которые обозначим так же $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Каждая таблица $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ имеет свойства, сформулированные в виде следующей леммы.

Лемма 7. Каждая таблица $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ имеет парную ей таблицу в $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ с такой же верхней компонентной $\pi_U(T)$. Множество элементов любого столбца в $\pi_U(T)$ равно либо $\{0, 2, 4\}$, либо $\{1, 3, 5\}$. $\pi_U(T)$ имеет ровно три строки и они попарно различаются в каждом столбце. Строки нижней компоненты $\pi_O(T)$ отличаются только в крайнем левом столбце. Если множество элементов столбца в $\pi_U(T)$ равно $\{0, 2, 4\}$, то для элементов $\{x, y\}$ соответствующего столбца в $\pi_O(T)$ выполняется либо $\{x, y\} \subseteq \{0, 3\}$, либо $\{x, y\} \subseteq \{1, 4\}$. Если же множество элементов столбца в $\pi_U(T)$ равно $\{1, 3, 5\}$, то соответственно либо $\{x, y\} \subseteq \{2, 5\}$, либо $\{x, y\} \subseteq \{1, 4\}$.

Пусть $(n - 1)$ -мерная H -таблица T удовлетворяет лемме 7. Тогда множество $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \circ T$ состоит из 4 n -мерных H -таблиц с такими же свойствами. Отсюда следует

Теорема 1. *Множество H -таблиц с уникальными нижними компонентами, представляющее множество $\mathcal{B}^{(n-1)\circ}$, состоит из $3 \cdot 4^{n-1}$ элементов. При этом $2 \cdot 4^{n-1}$ H -таблиц (H -0235-таблиц) содержат ровно 3 строки и 4^{n-1} таблиц (H -14-таблиц) ровно 6 строк в верхних компонентах. H -14-таблицы в крайнем правом столбце верхней компоненты содержат все символы из алфавита \mathbb{Z}_6 . Если H -14-таблицы раздвоить так, чтобы крайний правый столбец таблиц состоял либо из $\{1, 3, 5\}$, либо из $\{0, 2, 4\}$, то все таблицы будут удовлетворять свойствам леммы 7.*

Поскольку до разбиения H -14-таблиц на две, форма представления продукционных пар была с уникальной нижней компонентной, то верно

Следствие 1. *В множестве $\mathcal{B}^{(n-1)\circ}$ ровно $6 \cdot 4^{n-1}$ различных строк.*

Лемма 8. *Множество \mathcal{B} в форме H -таблиц с уникальными нижними компонентами имеет вид:*

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Рассмотрим 2-мерные продукционные пары \mathcal{B} в форме H -таблиц с уникальной нижней компонентой. Обозначим здесь это множество таблиц через $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Все 18 таблиц в нижней компоненте содержат ровно 2 строки. 12 таблиц в верхней компоненте содержат 3 строки, назовём их H -0235-таблицами, а 6 таблиц содержат 6 строк, назовём их H -14-таблицами. Разобьём H -14-таблицы следующим образом:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

В такой форме \mathcal{B} представлено 24 таблицами, которые обозначим так же $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Лемма 9. *Каждая таблица $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ имеет парную ей таблицу в $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ с такой же верхней компонентной $\pi_U(T)$. Верхняя компонента $\pi_U(T)$ имеет ровно три строки. Как строки верхней $\pi_U(T)$ компоненты, так и строки нижней компоненты $\pi_O(T)$ отличаются только в крайнем левом столбце. Если элементы столбца в $\pi_U(T)$ принадлежат $\{0, 2, 4\}$, то для элементов $\{x, y\}$ соответствующего столбца в $\pi_O(T)$ выполняется либо $\{x, y\} \subseteq \{0, 3\}$, либо $\{x, y\} \subseteq \{1, 4\}$. Если же элементы столбца в $\pi_U(T)$ принадлежат $\{1, 3, 5\}$, то либо $\{x, y\} \subseteq \{2, 5\}$, либо $\{x, y\} \subseteq \{1, 4\}$.*

Пусть $(n - 1)$ -мерная H -таблица T удовлетворяет лемме 9. Тогда множество $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \circ T$ состоит из 6 n -мерных H -таблиц с такими же свойствами. Отсюда следует

Теорема 2. *Множество H -таблиц с уникальной нижней компонентой, представляющее n -мерные продукционные пары $\mathcal{B}^{(n-1)\circ}$, состоит из $3 \cdot 6^{n-1}$ элементов. При этом $2 \cdot 6^{n-1}$ H -таблиц (H -0235-таблиц) содержат ровно 3 строки и*

6^{n-1} таблиц (H -14-таблиц) ровно 6 строк в верхних компонентах. Если H -14-таблицы раздвоить так, чтобы крайний правый столбец состоял из одинаковых символов, то все таблицы будут удовлетворять свойствам леммы 9.

Поскольку до раздвоения H -14-таблиц форма представления продукционных пар была с уникальной нижней компонентной, то верно

Следствие 2. В множестве $\mathcal{B}^{(n-1)\circ}$ ровно 6^n различных строк.

Лемма 10. Множество $\hat{\mathcal{B}}$ в форме H -таблиц с уникальными верхними компонентами имеет вид:

$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \\ 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 5 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 4 & 1 \\ 5 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---

Лемма 11. Множество $\mathcal{U}_{3/2}^{3 \times 2}$ в форме V -таблиц с уникальными левыми и правыми компонентами имеет вид:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$		
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$		

Лемма 12. Множество $\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3}$ имеет вид:

$\begin{array}{r} 000 \\ 200 \\ 400 \\ \hline 000 \\ 300 \end{array}$	$\begin{array}{r} 001 \\ 201 \\ 401 \\ \hline 002 \\ 302 \end{array}$	$\begin{array}{r} 002 \\ 202 \\ 402 \\ \hline 003 \\ 303 \end{array}$	$\begin{array}{r} 003 \\ 203 \\ 403 \\ \hline 005 \\ 305 \end{array}$	$\begin{array}{r} 004 \\ 204 \\ 404 \\ \hline 010 \\ 310 \end{array}$	$\begin{array}{r} 005 \\ 205 \\ 405 \\ \hline 012 \\ 312 \end{array}$	$\begin{array}{r} 010 \\ 210 \\ 410 \\ \hline 013 \\ 313 \end{array}$	$\begin{array}{r} 011 \\ 211 \\ 411 \\ \hline 015 \\ 315 \end{array}$	$\begin{array}{r} 012 \\ 212 \\ 412 \\ \hline 020 \\ 320 \end{array}$	$\begin{array}{r} 013 \\ 213 \\ 413 \\ \hline 022 \\ 322 \end{array}$	$\begin{array}{r} 014 \\ 214 \\ 414 \\ \hline 023 \\ 323 \end{array}$	$\begin{array}{r} 015 \\ 215 \\ 415 \\ \hline 025 \\ 325 \end{array}$
$\begin{array}{r} 020 \\ 220 \\ 420 \\ \hline 030 \\ 330 \end{array}$	$\begin{array}{r} 021 \\ 221 \\ 421 \\ \hline 032 \\ 332 \end{array}$	$\begin{array}{r} 022 \\ 222 \\ 422 \\ \hline 033 \\ 333 \end{array}$	$\begin{array}{r} 023 \\ 223 \\ 423 \\ \hline 035 \\ 335 \end{array}$	$\begin{array}{r} 024 \\ 224 \\ 424 \\ \hline 040 \\ 340 \end{array}$	$\begin{array}{r} 025 \\ 225 \\ 425 \\ \hline 042 \\ 342 \end{array}$	$\begin{array}{r} 030 \\ 230 \\ 430 \\ \hline 043 \\ 343 \end{array}$	$\begin{array}{r} 031 \\ 231 \\ 431 \\ \hline 045 \\ 345 \end{array}$	$\begin{array}{r} 032 \\ 232 \\ 432 \\ \hline 050 \\ 350 \end{array}$	$\begin{array}{r} 033 \\ 233 \\ 433 \\ \hline 052 \\ 352 \end{array}$	$\begin{array}{r} 034 \\ 234 \\ 434 \\ \hline 053 \\ 353 \end{array}$	$\begin{array}{r} 035 \\ 235 \\ 435 \\ \hline 055 \\ 355 \end{array}$
$\begin{array}{r} 040 \\ 240 \\ 440 \\ \hline 100 \\ 400 \end{array}$	$\begin{array}{r} 041 \\ 241 \\ 441 \\ \hline 102 \\ 402 \end{array}$	$\begin{array}{r} 042 \\ 242 \\ 442 \\ \hline 103 \\ 403 \end{array}$	$\begin{array}{r} 043 \\ 243 \\ 443 \\ \hline 105 \\ 405 \end{array}$	$\begin{array}{r} 044 \\ 244 \\ 444 \\ \hline 110 \\ 410 \end{array}$	$\begin{array}{r} 045 \\ 245 \\ 445 \\ \hline 112 \\ 412 \end{array}$	$\begin{array}{r} 050 \\ 250 \\ 450 \\ \hline 113 \\ 413 \end{array}$	$\begin{array}{r} 051 \\ 251 \\ 451 \\ \hline 115 \\ 415 \end{array}$	$\begin{array}{r} 052 \\ 252 \\ 452 \\ \hline 120 \\ 420 \end{array}$	$\begin{array}{r} 053 \\ 253 \\ 453 \\ \hline 122 \\ 422 \end{array}$	$\begin{array}{r} 054 \\ 254 \\ 454 \\ \hline 123 \\ 423 \end{array}$	$\begin{array}{r} 055 \\ 255 \\ 455 \\ \hline 125 \\ 425 \end{array}$
$\begin{array}{r} 100 \\ 300 \\ 500 \\ \hline 130 \\ 430 \end{array}$	$\begin{array}{r} 101 \\ 301 \\ 501 \\ \hline 132 \\ 432 \end{array}$	$\begin{array}{r} 102 \\ 302 \\ 502 \\ \hline 133 \\ 433 \end{array}$	$\begin{array}{r} 103 \\ 303 \\ 503 \\ \hline 135 \\ 435 \end{array}$	$\begin{array}{r} 104 \\ 304 \\ 504 \\ \hline 140 \\ 440 \end{array}$	$\begin{array}{r} 105 \\ 305 \\ 505 \\ \hline 142 \\ 442 \end{array}$	$\begin{array}{r} 110 \\ 310 \\ 510 \\ \hline 143 \\ 443 \end{array}$	$\begin{array}{r} 111 \\ 311 \\ 511 \\ \hline 145 \\ 445 \end{array}$	$\begin{array}{r} 112 \\ 312 \\ 512 \\ \hline 150 \\ 450 \end{array}$	$\begin{array}{r} 113 \\ 313 \\ 513 \\ \hline 152 \\ 452 \end{array}$	$\begin{array}{r} 114 \\ 314 \\ 514 \\ \hline 153 \\ 453 \end{array}$	$\begin{array}{r} 115 \\ 315 \\ 515 \\ \hline 155 \\ 455 \end{array}$
$\begin{array}{r} 120 \\ 320 \\ 520 \\ \hline 200 \\ 500 \end{array}$	$\begin{array}{r} 121 \\ 321 \\ 521 \\ \hline 202 \\ 502 \end{array}$	$\begin{array}{r} 122 \\ 322 \\ 522 \\ \hline 203 \\ 503 \end{array}$	$\begin{array}{r} 123 \\ 323 \\ 523 \\ \hline 205 \\ 505 \end{array}$	$\begin{array}{r} 124 \\ 324 \\ 524 \\ \hline 210 \\ 510 \end{array}$	$\begin{array}{r} 125 \\ 325 \\ 525 \\ \hline 212 \\ 512 \end{array}$	$\begin{array}{r} 130 \\ 330 \\ 530 \\ \hline 213 \\ 513 \end{array}$	$\begin{array}{r} 131 \\ 331 \\ 531 \\ \hline 215 \\ 515 \end{array}$	$\begin{array}{r} 132 \\ 332 \\ 532 \\ \hline 220 \\ 520 \end{array}$	$\begin{array}{r} 133 \\ 333 \\ 533 \\ \hline 222 \\ 522 \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ 334 \\ 534 \\ \hline 223 \\ 523 \end{array}$	$\begin{array}{r} 135 \\ 335 \\ 535 \\ \hline 225 \\ 525 \end{array}$
$\begin{array}{r} 140 \\ 340 \\ 540 \\ \hline 230 \\ 530 \end{array}$	$\begin{array}{r} 141 \\ 341 \\ 541 \\ \hline 232 \\ 532 \end{array}$	$\begin{array}{r} 142 \\ 342 \\ 542 \\ \hline 233 \\ 533 \end{array}$	$\begin{array}{r} 143 \\ 343 \\ 543 \\ \hline 235 \\ 535 \end{array}$	$\begin{array}{r} 144 \\ 344 \\ 544 \\ \hline 240 \\ 540 \end{array}$	$\begin{array}{r} 145 \\ 345 \\ 545 \\ \hline 242 \\ 542 \end{array}$	$\begin{array}{r} 150 \\ 350 \\ 550 \\ \hline 243 \\ 543 \end{array}$	$\begin{array}{r} 151 \\ 351 \\ 551 \\ \hline 245 \\ 545 \end{array}$	$\begin{array}{r} 152 \\ 352 \\ 552 \\ \hline 250 \\ 550 \end{array}$	$\begin{array}{r} 153 \\ 353 \\ 553 \\ \hline 252 \\ 552 \end{array}$	$\begin{array}{r} 154 \\ 354 \\ 554 \\ \hline 253 \\ 553 \end{array}$	$\begin{array}{r} 155 \\ 355 \\ 555 \\ \hline 255 \\ 555 \end{array}$
$\begin{array}{r} 000 \\ 001 \\ 200 \\ 201 \\ 400 \\ 401 \\ \hline 001 \\ 301 \end{array}$	$\begin{array}{r} 002 \\ 003 \\ 202 \\ 203 \\ 402 \\ 403 \\ \hline 004 \\ 304 \end{array}$	$\begin{array}{r} 004 \\ 005 \\ 204 \\ 205 \\ 404 \\ 405 \\ \hline 011 \\ 311 \end{array}$	$\begin{array}{r} 010 \\ 011 \\ 210 \\ 211 \\ 410 \\ 411 \\ \hline 013 \\ 313 \end{array}$	$\begin{array}{r} 012 \\ 013 \\ 212 \\ 213 \\ 412 \\ 413 \\ \hline 015 \\ 315 \end{array}$	$\begin{array}{r} 014 \\ 015 \\ 214 \\ 215 \\ 414 \\ 415 \\ \hline 016 \\ 316 \end{array}$	$\begin{array}{r} 020 \\ 021 \\ 220 \\ 221 \\ 420 \\ 421 \\ \hline 023 \\ 323 \end{array}$	$\begin{array}{r} 022 \\ 023 \\ 222 \\ 223 \\ 422 \\ 423 \\ \hline 025 \\ 325 \end{array}$	$\begin{array}{r} 024 \\ 025 \\ 224 \\ 225 \\ 424 \\ 425 \\ \hline 026 \\ 326 \end{array}$	$\begin{array}{r} 030 \\ 031 \\ 230 \\ 231 \\ 430 \\ 431 \\ \hline 033 \\ 333 \end{array}$	$\begin{array}{r} 032 \\ 033 \\ 232 \\ 233 \\ 432 \\ 433 \\ \hline 035 \\ 335 \end{array}$	$\begin{array}{r} 034 \\ 035 \\ 234 \\ 235 \\ 434 \\ 435 \\ \hline 036 \\ 336 \end{array}$
$\begin{array}{r} 040 \\ 041 \\ 240 \\ 241 \\ 440 \\ 441 \\ \hline 101 \\ 401 \end{array}$	$\begin{array}{r} 042 \\ 043 \\ 242 \\ 243 \\ 442 \\ 443 \\ \hline 104 \\ 404 \end{array}$	$\begin{array}{r} 044 \\ 045 \\ 244 \\ 245 \\ 444 \\ 445 \\ \hline 111 \\ 411 \end{array}$	$\begin{array}{r} 050 \\ 051 \\ 250 \\ 251 \\ 450 \\ 451 \\ \hline 114 \\ 414 \end{array}$	$\begin{array}{r} 052 \\ 053 \\ 252 \\ 253 \\ 452 \\ 453 \\ \hline 121 \\ 421 \end{array}$	$\begin{array}{r} 054 \\ 055 \\ 254 \\ 255 \\ 454 \\ 455 \\ \hline 124 \\ 424 \end{array}$	$\begin{array}{r} 100 \\ 101 \\ 300 \\ 301 \\ 500 \\ 501 \\ \hline 131 \\ 431 \end{array}$	$\begin{array}{r} 102 \\ 103 \\ 302 \\ 303 \\ 502 \\ 503 \\ \hline 134 \\ 434 \end{array}$	$\begin{array}{r} 104 \\ 105 \\ 304 \\ 305 \\ 504 \\ 505 \\ \hline 141 \\ 441 \end{array}$	$\begin{array}{r} 110 \\ 111 \\ 310 \\ 311 \\ 510 \\ 511 \\ \hline 144 \\ 444 \end{array}$	$\begin{array}{r} 112 \\ 113 \\ 312 \\ 313 \\ 512 \\ 513 \\ \hline 151 \\ 451 \end{array}$	$\begin{array}{r} 114 \\ 115 \\ 314 \\ 315 \\ 514 \\ 515 \\ \hline 154 \\ 454 \end{array}$
$\begin{array}{r} 120 \\ 121 \\ 320 \\ 321 \\ 520 \\ 521 \\ \hline 201 \\ 501 \end{array}$	$\begin{array}{r} 122 \\ 123 \\ 322 \\ 323 \\ 522 \\ 523 \\ \hline 204 \\ 504 \end{array}$	$\begin{array}{r} 124 \\ 125 \\ 324 \\ 325 \\ 524 \\ 525 \\ \hline 211 \\ 511 \end{array}$	$\begin{array}{r} 130 \\ 131 \\ 330 \\ 331 \\ 530 \\ 531 \\ \hline 214 \\ 514 \end{array}$	$\begin{array}{r} 132 \\ 133 \\ 332 \\ 333 \\ 532 \\ 533 \\ \hline 221 \\ 521 \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ 135 \\ 334 \\ 335 \\ 534 \\ 535 \\ \hline 224 \\ 524 \end{array}$	$\begin{array}{r} 140 \\ 141 \\ 340 \\ 341 \\ 540 \\ 541 \\ \hline 231 \\ 531 \end{array}$	$\begin{array}{r} 142 \\ 143 \\ 342 \\ 343 \\ 542 \\ 543 \\ \hline 234 \\ 534 \end{array}$	$\begin{array}{r} 144 \\ 145 \\ 344 \\ 345 \\ 544 \\ 545 \\ \hline 241 \\ 541 \end{array}$	$\begin{array}{r} 150 \\ 151 \\ 350 \\ 351 \\ 550 \\ 551 \\ \hline 244 \\ 544 \end{array}$	$\begin{array}{r} 152 \\ 153 \\ 352 \\ 353 \\ 552 \\ 553 \\ \hline 251 \\ 551 \end{array}$	$\begin{array}{r} 154 \\ 155 \\ 354 \\ 355 \\ 554 \\ 555 \\ \hline 254 \\ 554 \end{array}$

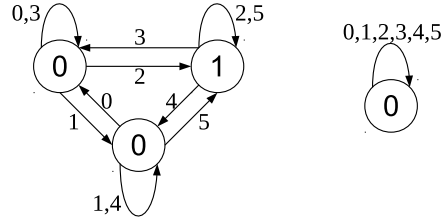


Рис. 1. Автомат (слева), порождающий язык верхних и язык нижних строк (читаемых справа налево) слов из \mathcal{B}^{no} , $n \in \mathbb{Z}^+$. Автомат (справа), порождающий язык верхних и язык нижних строк слов из \mathcal{B}^{no} , $n \in \mathbb{Z}^+$. Он же для языка верхних и языка нижних строк слов из \mathcal{B}^{no} , $n \in \mathbb{Z}^+$. Все состояния начальные и заключительные. Пустые слова не принимаются во внимание.

Лемма 13. (о симметрии) Множество \mathcal{B} , а следовательно и \mathcal{B} , \mathcal{B} , $\mathcal{U}_{3/2}$, инвариантно относительно преобразования $f(x) = 5 - x$ алфавита \mathbb{Z}_6 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Языки W и W^{dual} в алфавите \mathbb{Z}_6 назовём двойственными, если один из другого получается преобразованием $f(x) = 5 - x$ алфавита.

Следствие 3. Верно, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{dual}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{dual}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{dual}$, $\mathcal{U}_{3/2} = \mathcal{U}_{3/2}^{dual}$.

Лемма 14. Верно следующее:

1. Если $\begin{pmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \\ c_1 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & a \\ b_2 & b \\ c_2 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{3 \times 2}$, то $b_1 = b_2$.
2. Если $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3}$, то $b_1 = b_2$.
3. Если $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3}$, то $b_1 = b_2$.

Доказательство. Следует из леммы 11 и теоремы 2. \square

Лемма 15. Верно, что $(\mathcal{B}^{\pm\omega})^{\pm\omega} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega})^{\pm\omega} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega})^{\pm\omega}$.

Доказательство. Для того, чтобы доказать $(\mathcal{B}^{\pm\omega})^{\pm\omega} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega})^{\pm\omega}$, достаточно показать, что из $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ следует $\begin{pmatrix} c & b \\ e & d \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$, и, наоборот, из $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ следует $\begin{pmatrix} a & d \\ c & f \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$. В силу конечности рассматриваемых объектов эти факты устанавливаются экспериментально. Отношение $(\mathcal{B}^{\pm\omega})^{\pm\omega} \sim (\mathcal{B}^{\pm\omega})^{\pm\omega}$ доказывается аналогично. \square

Лемма 16. Множества \mathcal{B}^{no} , \mathcal{B}^{no} , \mathcal{B}^{no} , $\mathcal{B}^{\pm\omega}$, $\mathcal{B}^{\pm\omega}$, $\mathcal{B}^{\pm\omega}$ не содержат вертикальных тупиков, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. По конечным множествам \mathcal{B} , \mathcal{B} , \mathcal{B} построим автоматы, допускающие языки нижних строк и языки верхних строк слов соответственно из $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}^{no}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}^{no}$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}^{no}$. Автоматы показаны на рисунке 1. Из построений следует, что языки верхних и языки нижних строк совпадают для каждого рассматриваемого множества. \square

Лемма 17. Верны равенства:

$$\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B}, \quad \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B}, \quad \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B}.$$

$$\mathcal{U}_{3/2}[0 : 2, :] = \mathcal{B}^{\pm\omega^\circ}, \quad \dot{\mathcal{U}}_{3/2}[0 : 2, :] = \dot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ}, \quad \ddot{\mathcal{U}}_{3/2}[0 : 2, :] = \ddot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ}.$$

Доказательство. Первые три равенства доказываются экспериментально.

Включение $\mathcal{U}_{3/2}[0 : 2, :] \subseteq \mathcal{B}^{\pm\omega^\circ}$ верно по определению. Обратное включение верно в силу равенства $\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B}$, так как если $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{2 \times 3}$, то b_1 формально получается умножением abc на $3/2$, а значит вся нижняя строка $\mathcal{B}^{\pm\omega^\circ}$ получается из верхней умножением на $3/2$. Далее отсюда следует, что $\mathcal{U}_{3/2} = (\mathcal{B}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet}$. Теперь оставшиеся равенства $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}[0 : 2, :] = \dot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ}$, $\ddot{\mathcal{U}}_{3/2}[0 : 2, :] = \ddot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ}$ следуют из $(\mathcal{B}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet} \sim (\dot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet} \sim (\ddot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet}$ и того, что $\dot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ}$, $\ddot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ}$ не содержат вертикальных тушиков. \square

Следствие 4. *Справедливы равенства:*

$$\mathcal{U}_{3/2}^{2 \times n} = \mathcal{B}^{(n-1)^\circ}, \quad \mathcal{U}_{3/2} = (\mathcal{B}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet}.$$

$$\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n} = \dot{\mathcal{B}}^{(n-1)^\circ}, \quad \dot{\mathcal{U}}_{3/2} = (\dot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet},$$

$$\ddot{\mathcal{U}}_{3/2}^{2 \times n} = \ddot{\mathcal{B}}^{(n-1)^\circ}, \quad \ddot{\mathcal{U}}_{3/2} = (\ddot{\mathcal{B}}^{\pm\omega^\circ})^{\pm\omega^\bullet}.$$

Заметим, что $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2} \neq \mathcal{B}^{(n-1)^\bullet}$, $\dot{\mathcal{U}}_{3/2}^{n \times 2} \neq \dot{\mathcal{B}}^{(n-1)^\bullet}$, $\ddot{\mathcal{U}}_{3/2}^{n \times 2} \neq \ddot{\mathcal{B}}^{(n-1)^\bullet}$.

Через \mathcal{L} обозначим частичное отображение на словах такое, что $\mathcal{L}(x_1 x_2 x_3) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & x_1 \\ b & x_2 \\ c & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{3/2}^{3 \times 2},$$

а для $n \geq 3$ $\mathcal{L}(x_1 x_2 \dots x_n) = \mathcal{L}(x_1 x_2 x_3) \mathcal{L}(x_2 x_3 x_4) \dots \mathcal{L}(x_{n-2} x_{n-1} x_n)$. И, наконец, для бесконечных слов: пусть $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $c' : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, тогда $\mathcal{L}(c) = c'$, если для любого $i \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{L}(c(i-1)c(i)c(i+1)) = c'(i)$.

Следствие 5. *Отображение \mathcal{L} является функцией.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слово w назовём правильным, если определена функция $\mathcal{L}(w)$. При этом, если $w = abc \in \mathbb{Z}_6^3$ правильное слово, то правильными также назовём слова ab , bc , a , b , c и пустое слово.

Теорема 3. *Если слово w правильное, то и $\mathcal{L}(w)$ правильное.*

Доказательство. Утверждение достаточно доказать для всех слов w длины 5. Поскольку их конечное число, то лемма устанавливается экспериментально. \square

Лемма 18. *Для любого $n > 1$ правые столбцы слов из \mathcal{B}^{n^\bullet} правильные.*

Доказательство. Утверждение достаточно доказать для $n = 2$. Этот факт устанавливается экспериментально. \square

Лемма 19. *Пусть $W = \mathcal{B}^{(n-1)^\bullet}$, $n > 1$. Множество крайних левых столбцов слов из W содержится во множестве крайних правых столбцов слов из W .*

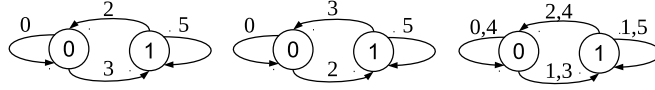


Рис. 2. Автоматы, порождающий все правильные слова в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$ (читаемые сверху вниз – слева, читаемые снизу вверх – посередине) и читаемые сверху вниз в алфавите \mathbb{Z}_6 (справа). В автоматах все состояния начальные и заключительные.

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово

$$\begin{pmatrix} b_{-1} & c_{-1} \\ b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots \\ b_{n+2} & c_{n+2} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{(n+3)\bullet}.$$

Это значит также, что

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{(n-1)\bullet}.$$

По лемме 18 и теореме 3 слово $b_0 b_1 \dots b_{n+1}$ правильное.

Пусть $a_1 a_2 \dots a_n = \mathcal{L}(b_0 b_1 \dots b_{n+1})$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{(n-1)\bullet}.$$

Что и требовалось доказать. \square

Следствие 6. Множество всех горизонтально нетупиковых слов из $\mathcal{B}^{(n-1)\bullet}$ равно $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2}$.

Доказательство. Понятно, что $\mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2} \subseteq W$. Пусть $w \in W^{\pm \omega_0}$. В силу построений каждая строка в w получается из предыдущей умножением на $3/2$. Следовательно $W \subseteq \mathcal{U}_{3/2}^{n \times 2}$. Что и требовалось доказать. \square

Лемма 20. Автоматы, порождающие правильные слова в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$ и в алфавите \mathbb{Z}_6 имеют вид, как показано на рисунке 2 слева и справа соответственно.

Доказательство. Автоматы строятся по множеству \mathcal{B} . \square

4 n -Мерные 0235-продукционные пары

Продукционные пары, крайние правые столбцы которых не содержат символов 1 и 4, назовём 0235-продукционными парами. Продукционные пары, крайние пра-

вые столбцы которых не содержат символов 1, 4, 5, назовём 023-продукционными парами.

Лемма 21. *Список 1-мерных 0235-продукционных пар представляется в виде:*

$$\mathcal{I}_{0235} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Список 1-мерных 023-продукционных пар представляется в виде:

$$\mathcal{I}_{023} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Обозначим множества 1-мерных 0235-продукционных и 023-продукционных пар через \mathcal{I}_{0235} и \mathcal{I}_{023} соответственно. По определению положим, что $\mathcal{I}_{0235}^{0\bullet} = \{0, 2, 3, 5\}$, $\mathcal{I}_{0235}^{1\bullet} = \mathcal{I}_{0235}$.

Следствие 7. *Список всех 3-мерных вертикальных продукционных пар с левыми столбцами в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$ имеет в форме V-таблиц следующий вид:*

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Лемма 22.

$$\dot{\mathcal{B}} \circ \mathcal{I}_{0235} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{0235} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathcal{B}} \circ \mathcal{I}_{0235} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 5 \\ 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Лемма 23. Множество $\mathcal{B} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{0235}$ имеет вид:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Теорема 4. H -таблицы, представляющие множество $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$, имеют уникальные верхние и нижние компоненты, в которых ровно по две строки. В таком представлении $2 \cdot 6^{n-1}$ таблиц. В каждой таблице строки $x_n x_{n-1} \dots x_1$ и $x'_n x'_{n-1} \dots x'_1$ верхней компоненты, как и строки $y_n y_{n-1} \dots y_1$ и $y'_n y'_{n-1} \dots y'_1$ нижней компоненты отличаются только в крайнем левом столбце. При этом, если $x_i, x'_i \in \{1, 3, 5\}$, то $y_i, y'_i \in \{1, 2, 4, 5\}$, а если $x_i, x'_i \in \{0, 2, 4\}$, то $y_i, y'_i \in \{0, 1, 3, 4\}$.

Доказательство. Доказательство в форме математической индукции легко следует из леммы 22 для $\mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{0235}$ и леммы 8 для \mathcal{B} . \square

Следствие 8. В множестве $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$ ровно $4 \cdot 6^{n-1}$ различных строк.

Лемма 24. Список элементов множества $\hat{\mathcal{B}} \circ \hat{\mathcal{B}} \circ \mathcal{I}_{0235}$ имеет вид:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Множество $\hat{\mathcal{B}}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$ получается из представления $\hat{\mathcal{B}}^{(n-1)}$ в форме H -таблиц удалением всех H -14-таблиц и удалением в каждой H -0235-таблице из

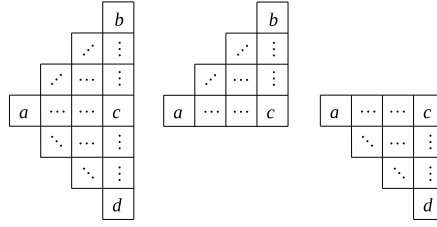


Рис. 3. Иллюстрация вида фрагментов слов к теореме 6.

верхней компоненты единственной строки, заканчивающейся на 1 или 4. Отсюда следует

Теорема 5. *Н-таблицы, представляющие множество $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$, имеют уникальные верхние и нижние компоненты, в которых ровно по две строки. Всего в представлении $2 \cdot 4^{n-1}$ таблиц. В каждой таблице строки $x_n x_{n-1} \dots x_1$ и $x'_n x'_{n-1} \dots x'_1$ верхней компоненты отличаются в каждом столбце, при этом $x_i, x'_i \in \{1, 3, 5\}$ или $x_i, x'_i \in \{0, 2, 4\}$, $1 \leq i \leq n$. В каждой таблице строки $y_n y_{n-1} \dots y_1$ и $y'_n y'_{n-1} \dots y'_1$ нижней компоненты отличаются только в крайнем левом столбце, при этом $y_n, y'_n \in \{0, 3\}$ или $y_n, y'_n \in \{2, 5\}$ или $y_n, y'_n \in \{1, 4\}$. Если $x_i, x'_i \in \{1, 3, 5\}$, то $y_i, y'_i \in \{1, 2, 4, 5\}$, а если $x_i, x'_i \in \{0, 2, 4\}$, то $y_i, y'_i \in \{0, 1, 3, 4\}$.*

Следствие 9. *В множестве $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$ ровно 4^n различных строк.*

Следствие 10. *Верны следующие утверждения.*

1. Если

$$\begin{pmatrix} c_n \dots c_1 c_0 \\ a_n \dots a_1 a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}, \quad \begin{pmatrix} c_n \dots c_1 c_0 \\ b_n \dots b_1 b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235},$$

то $a_{n-1} \dots a_1 a_0 = b_{n-1} \dots b_1 b_0$.

2. Если

$$\begin{pmatrix} c_n \dots c_1 c_0 \\ a_n \dots a_1 a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}, \quad \begin{pmatrix} c_n \dots c_1 c_0 \\ b_n \dots b_1 b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235},$$

то $a_{n-1} \dots a_1 a_0 = b_{n-1} \dots b_1 b_0$.

Теорема 6. *Пусть T – множество 2-мерных треугольных фрагментов слов из $\mathcal{U}_{3/2}$ как показано на рисунке 3 (слева), в которых вертикальное слово $b \dots c \dots d$ не содержит символов 1 и 4. Множество T определяет взаимно-однозначное соответствие между множеством вертикальных слов $b \dots c \dots d$ и множеством диагональных слов $a \dots b$ в T .*

Доказательство. По следствию 10, пункт 1, слово $a \dots b$ полностью и однозначно определяет фрагмент, показанный на рисунке 3 в центре. По следствию 10, пункт 2, слово $a \dots c$ полностью и однозначно определяет фрагмент, показанный на рисунке 3 справа. То, что слово $b \dots d$ однозначно определяет всё треугольное слово, следует из леммы 14, пункт 1. \square

Следствие 11. Множество квадратных слов $\cup_{n=1}^{\infty} (\dot{\mathcal{B}}^{n\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{n\bullet}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между его нулевыми (крайними верхними) строками и нулевыми (крайними правыми) столбцами.

Следствие 12. Множество слов $(\dot{\mathcal{B}}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между его нулевыми строками и столбцами.

Обозначим здесь множество всех строк слов из $(\dot{\mathcal{B}}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}$ через A . Обозначаем дальше биекцию из следствия 12 через $\mathcal{F} : A \rightarrow \mathcal{I}_{0235}^{+\omega\bullet}$.

Теорема 7. Для любого $n \in \mathbb{N}$ язык всех правильных слов в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$ включается в язык крайних левых столбцов слов из $\cup_{m=1}^{\infty} (\dot{\mathcal{B}}^{n\circ})^{m\bullet}$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1 о структуре H -таблиц для $\dot{\mathcal{B}}^{n\circ}$. Удалим из H -таблиц все строки с цифрами 1 и 4 в крайнем левом столбце. В верхних компонентах останутся ровно 2 строки с цифрами 0 и 2 или 3 и 5 в крайних левых столбцах. Некоторые нижние компоненты окажутся пустыми. Удалим соответствующие таблицы как тупиковые. Полученная совокупность таблиц представляет некоторую конечную совокупность продукционных пар W , в которых множество строк верхних компонент строго включается в множество строк нижних. Это значит, что для любого $w \in W$ $w \bullet W \neq \emptyset$. Так как в верхних компонентах в левом столбце всегда ровно два символа 0 и 2 или 3 и 5, то построив по W минимальный автомат, допускающий язык читаемых снизу вверх левых столбцов, мы получим автомат на среднем рисунке 2. \square

Следствие 13. Для любого слова $u \in (\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{\pm\omega\bullet}$ существует слово $w \in (\mathcal{I}_{0235} \circ \mathcal{B}^{-\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$ такое, что $u \circ w \in \mathcal{U}_{3/2}$.

Теорема 8. Пусть $U = U_1 = (\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235} \circ \mathcal{B}^{-\omega\circ})^{\pm\omega\bullet}$ или $U = U_2 = (\mathcal{B}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{\pm\omega\bullet}$ или $U = U_3 = (\dot{\mathcal{B}}^{+\omega\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}$. Пусть $i \geq 0$, $W_i = \{u[:, i] | u \in U\}$. Тогда ограничение отображения L на множество W_i , то есть $L : W_i \rightarrow W_{i+1}$, является биекцией.

Доказательство. Теорему достаточно доказать случай $U = U_1$. Из него по следствию 13 получим U_2 и U_3 . При этом достаточно доказать инъективность L .

Пусть $u, u' \in U_1$ и для некоторого $i \geq 0$ i -ые столбцы слов u и u' не равны, $u[:, i] \neq u'[:, i]$. Предположим, что теорема не верна и $L(u[:, i]) = L(u'[:, i])$, то есть $u[:, i+n] = u'[:, i+n]$, $n > 0$. Но тогда $u[j, i:] = u'[j, i:]$ или, другими словами, рассматривая строки двумерных слов как числовые объекты в системе счисления по основанию 6 с евклидовым расстоянием, $|u[j, :] - u'[j, :]| < 6^{i+1}$ для любого $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ $u[j, 0] \neq u'[j, 0]$. Не нарушая общности рассуждений положим $j = 0$, а также $u[0, 0] > u'[0, 0]$. Если показать, что $u[0, :] - u'[0, :] \neq 0$, то при достаточно большом n мы получим $|u[n, :] - u'[n, :]| = |(\frac{3}{2})^n (u[0, :] - u'[0, :])| > 6^{i+1}$, а это противоречит тому, что для всех $j \in \mathbb{Z}$ должно выполняться равенство $u[j, i:] = u'[j, i:]$. Отсюда будет следовать $L(u[:, i]) \neq L(u'[:, i])$.

Итак, покажем, что $u[0, :] - u'[0, :] \neq 0$. Заметим, что из $u[0, :] - u'[0, :] = 0$ следует $u[j, :] - u'[j, :] = 0$ для любого $j \in \mathbb{Z}$. Из равенства чисел с разными цифрами в

нулевом разряде необходимо следует одна из следующих ситуаций. Либо $u[0, 0] = 5$ и все символы справа от $u[0, 0]$ равны 5, то есть $u[0, : 1] = 55 \dots 5 \dots$, и $u'[0, : 1] = 00 \dots 0 \dots$. Либо $u[0, : 1] = 30 \dots 0 \dots$ и $u'[0, : 1] = 25 \dots 5 \dots$.

Из следствия 7, учитывая алфавит $\{0, 2, 3, 5\}$ нулевого столбца, следует, что ситуация $u[0, : 1] = 30 \dots 0 \dots$ и $u'[0, : 1] = 25 \dots 5 \dots$ невозможна.

Рассмотрим ситуацию $u[0, 0] = 5$, $u'[0, 0] = 0$. Найдем наименьший положительный индекс $j \in \mathbb{Z}$ такой, что $u[j, 0] \neq 5$ или $u'[j, 0] \neq 0$. Если же такого j нет, то все столбцы слева от $u[:, 0]$ начиная с некоторого момента, как можно увидеть из леммы 11, состоят из 5, а все столбцы слева от $u'[:, 0]$, начиная с некоторого момента, состоят из 0, то есть $L(u[:, i]) \neq L(u'[:, i])$, и мы сразу приходим к противоречию с предположением $L(u[:, i]) = L(u'[:, i])$.

Предположим, что $u[j, 0] \neq 5$ и $j > 0$. Тогда $u[j, 0] = 2$. Далее возможны только две ситуации: $u'[j, 0] = 0$ или $u'[j, 0] = 3$. В обоих случаях $u[j, 0] - u'[j, 0] \neq 0$.

Предположим, что $u'[j, 0] \neq 0$ и $j > 0$. Тогда $u[j, 0] = 3$. Далее возможны только две ситуации: $u[j, 0] = 5$ или $u[j, 0] = 2$. В обоих случаях $u[j, 0] - u'[j, 0] \neq 0$.

Предположим, что $u[j, 0] \neq 5$ и $j < 0$. Тогда $u[j, 0] = 3$. Далее возможны только две ситуации: $u'[j, 0] = 0$ или $u'[j, 0] = 2$. В обоих случаях $u[j, 0] - u'[j, 0] \neq 0$.

Предположим, что $u'[j, 0] \neq 0$ и $j < 0$. Тогда $u[j, 0] = 2$. Далее возможны только две ситуации: $u[j, 0] = 5$ или $u[j, 0] = 3$. В обоих случаях $u[j, 0] - u'[j, 0] \neq 0$. \square

5 Графы n -мерных 0235-продукционных пар

Зафиксируем натуральное $n > 1$. Обозначим $\mathcal{S}_n = \mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235}$. Множество всех различных строк в словах из \mathcal{S}_n обозначим через \mathcal{A}_n . Дальше мы не будем указывать нижний индекс n в обозначении \mathcal{S}_n и \mathcal{A}_n , пока в этом не возникнет необходимость. Рассматриваем \mathcal{S} как бинарное отношение на \mathcal{A} , то есть $w\mathcal{S}w'$ означает то же самое, что и $\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$.

Определим граф $G = (\mathcal{A}, \mathcal{S})$ в котором \mathcal{A} – множество вершин, \mathcal{S} – множество дуг. В графе G каждая вершина имеет ровно две входящие и две выходящие дуги. Вершину графа, состоящую из одних 0, назовем нулевой вершиной. Вершины назовём двойственными, если они соответствуют двойственным словам. Через G^{-1} обозначим граф, полученный из G заменой направления всех дуг на обратные. Поскольку $\mathcal{B}^{(n-1)\circ} = (\mathcal{B}^{(n-1)\circ})^{dual}$, то верна

Лемма 25. *Взаимно-однозначное отображение $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ вершин графа G , связывающее двойственные вершины, является изоморфизмом графов $G \simeq \phi(G)$.*

Очевидным образом, исходя из H -табличного представления продукционных пар и теоремы 5, верна следующая лемма.

Лемма 26. *Если для вершин s, s', t графа G верно, что (s, t) и (s', t) являются дугами G , то вторые дуги, исходящие из s и s' , также ведут в одну вершину, то есть существует t' , что (s, t') и (s', t') являются дугами.*

Определим преобразование ρ графа G , которое назовем свёрткой.

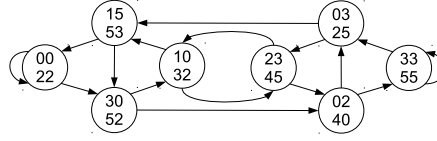


Рис. 4. Граф $\rho(G)$ для $n = 2$.

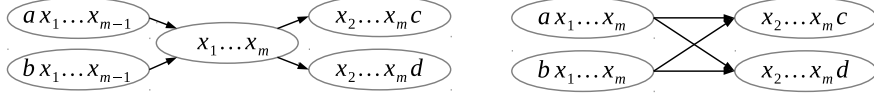


Рис. 5. Фрагмент перехода от графа Γ_n (слева) к графу $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$ (справа), $m = 2n - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разобьём вершины графа G на пары $\{s, s'\}$, исходящие дуги которых имеют общие концы. По этим парам построим новый граф такой, что из пары $\{s_0, s'_0\}$ дуга ведёт в $\{s_1, s'_1\}$ тогда и только тогда, когда в графе G существует либо дуга (s_0, s_1) , либо (s_0, s'_1) или, что то же самое, существует либо дуга (s'_0, s_1) , либо (s'_0, s'_1) . Другим словами, свёртка $\rho(G)$ получается из G склейкой вершин s и s' , у которых совпадают концы исходящих дуг.

Вершины графа $\rho(G)$ представляем парами строк из \mathcal{A} . Пример графа $\rho(G)$ для $n = 2$ показан на рисунке 4.

Лемма 26 верна и для графа $\rho(G)$, то есть к графу $\rho(G)$ применима операция свёртки $\rho^2(G) = \rho(\rho(G))$. Более того $\rho^2(G_{n+1}) \simeq G_n$ и $G_n \simeq G_n^{-1}$, $n \geq 1$. Прежде чем это доказать, рассмотрим граф G с другой точки зрения.

Исходя из леммы 21 построим автомат, допускающий язык $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_{0235}^{n\bullet} \cup \{\lambda\}$ всех правильных столбцов в алфавите $\{0, 2, 3, 5\}$. Автомат представлен на рисунке 2 слева. По этому языку и n построим следующий граф Γ_n . Множеством его вершин является $\mathcal{I}_{0235}^{(2n-2)\bullet}$. Пусть $w = x_{2n-1} \dots x_2 x_1$, $w' = x'_{2n-1} \dots x'_2 x'_1 \in \mathcal{I}_{0235}^{(2n-2)\bullet}$. Упорядоченная пара (w, w') является дугой графа Γ_n тогда и только тогда, когда $x_{2n-2} \dots x_2 x_1 = x'_{2n-1} \dots x'_2$. Из определения следует, что Γ_n является графом де Брёйна. В силу теоремы 6 верно

Следствие 14. Графы G_n и Γ_n изоморфны, $n \geq 0$.

Для графа Γ_n очевиден следующий переход к Γ_{n+1} за два шага. На первом шаге строится промежуточный граф $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$. Его вершинами являются дуги графа Γ_n . Пусть w, w' вершины графа $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$. Пара (w, w') является дугой графа $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$ тогда и только тогда, когда в графе Γ_n конец дуги w является началом дуги w' . На рисунке 5 показан фрагмент перехода от графа Γ_n к $\Gamma_{n+\frac{1}{2}}$. Видно, что вершины $ax_1 \dots x_n$ и $bx_1 \dots x_n$ удовлетворяют свойствам, сформулированным в лемме 26. Склеивка вершин вида $ax_1 \dots x_n$ и $bx_1 \dots x_n$ в вершину $x_1 \dots x_n$ является операцией свёртки. Таким образом верна теорема.

Теорема 9. Верно, что $\rho^2(G_n) \simeq G_{n-1}$, $n > 1$.

В силу того, что графы G_1 и G_1^{-1} изоморфны и построение графа G_i из G_{i-1}

зависит только от структуры графа G_{i-1} и не зависит от имён вершин, верно следующее утверждение:

Теорема 10. *Графы G_n и G_n^{-1} изоморфны.*

6 Автоматы n -мерных 0235-продукционных пар

По графу G определим автомат $A = (\mathcal{A}, \mathbb{Z}_6, \delta_A)$, где \mathcal{A} – множество состояний, \mathbb{Z}_6 – входной алфавит, $\delta_A : \mathcal{A} \times \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathcal{A}$ – функция переходов такая, что для любых $s, s' \in \mathcal{A}$ и $x \in \mathbb{Z}_6$ $\delta_A(s, x) = s'$ тогда и только тогда, когда (s, s') является дугой графа G и $s' = xx_2 \dots x_n$. Язык без пустого слова, допускаемый состоянием $s \in \mathcal{A}$ автомата A , когда все состояния заключительные, обозначим через $\lambda_A(s)$. Через $\rho(A)$ обозначим автомат, полученный из A свёрткой. Заметим, что склеиваемые состояния при свёртке имеют в автомате A одинаковые значения функции δ_A .

Теорема 11. *$s = s'$, $s, s' \in \rho(A)$, если, и только если, $\lambda_{\rho(A)}(s) = \lambda_{\rho(A)}(s')$.*

Доказательство. Следует из теоремы 8. \square

Построим по автомату A эквивалентный ему по допускаемому языку минимальный инициальный (с одним начальным состоянием) детерминированный автомат D . Ядром K автомата D назовем его подавтомат, образованный состояниями, принадлежащими сильно-связным компонентам графа автомата D , то есть в ядро входят состояния, через которые проходят циклические пути.

Лемма 27. *Ядро K и автомат A изоморфны.*

Доказательство. Оба автомата минимальны и допускают одно и то же множество языков. \square

Обозначим через η_n минимальное положительное целое такое, что для всех слов $w \in \mathbb{Z}_6^*$ длины η_n в автомате D любой путь длины больше либо равной η_n ведёт из начальной вершины в ядро. Обозначим через θ_n минимальное положительное целое такое, слово 0^{θ_n} в автомате D ведёт из начальной вершины в ядро.

Лемма 28. *Пусть $w_1, w_2 \in (\dot{\mathcal{B}}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{m\bullet}$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что $w_1[:n-1] = w_2[:n-1]$ и слово $w_1[:n-1]$ ведёт в автомате D из начального состояния в ядро. Тогда $w_1 = w_2$.*

Доказательство. Предположим $w_1[:n-2] \neq w_2[:n-2]$. Обозначим $\tilde{a}' = w_1[:n-1]$. Пусть s_0 – начальное состояние автомата D , а t – состояние ядра такое, что $\delta_D(s_0, \tilde{a}) = t$. Пусть \tilde{a}'' произвольное бесконечное слово, порождаемое состоянием t . Тогда конкатенация \tilde{a} слов \tilde{a}' и \tilde{a}'' принадлежит $(\dot{\mathcal{B}}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}[:n-1]$ и существуют два слова $w'_1, w''_2 \in (\dot{\mathcal{B}}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{+\omega\bullet}$ с одинаковыми крайними левыми столбцами \tilde{a} , рядом с которыми в w'_1 и w''_2 справа стоят разные столбцы, начинающиеся на $w_1[:n-2]$ и $w_2[:n-2]$ соответственно, что противоречит теореме 8. \square

Следствие 15. *Если $w_1, w_2 \in (\dot{\mathcal{B}}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{(\eta_n-1)\bullet}$ и $w_1[:n-1] = w_2[:n-1]$, то $w_1 = w_2$.*

Следствие 16. Если $w \in (\mathcal{B}^{(n-1)\circ} \circ \mathcal{I}_{0235})^{(\theta_n-1)\bullet}$ и столбец $w[:, n-1]$ состоит из нулей, то всё слово w состоит из нулей.

7 Достаточные условия пустоты множества Z -чисел

Пусть $\xi \in \mathbb{R}$ произвольное Z -число. Рассмотрим его как элемент языка $\mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$, то есть как бесконечную в обе стороны (влево и вправо) последовательность цифр с разделяющим на целую и дробную части знаком. Отсутствующие цифры заполним нулями. Бесконечная в обе стороны (вверх и вниз) последовательность чисел $\{\xi(3/2)^i | i \in \mathbb{Z}^\pm\}$, записанная друг под другом так, что цифры одинаковых рядов находятся в одном столбце, образует слово $u \in \mathcal{U}_{3/2}$. Такие 2-мерные слова u назовём вещественными 2-мерными Z -словами. Вещественное 2-мерное Z -слово $u \in \mathcal{U}_{3/2}$ характеризуется тем, что 1) слово $u[0, -1]$ состоит из символов алфавита $\{0, 1, 2\}$ и 2) (условие вещественности) любая строка $u[i, :]$, $i \in \mathbb{Z}^\pm$, начиная с некоторого места влево состоит из одних нулей. Если условие 2) не выполняется, то мы будем говорить не о вещественном Z -слове, а просто о Z -слове.

Продукционные пары, крайние правые столбцы которых не содержат символов 3, 4 и 5, назовём 012-продукционными парами. Обозначим множество 1-мерных 012-продукционных пар через \mathcal{I}_{012} .

Лемма 29. Множество вертикально нетупиковых слов в $\mathcal{B} \circ \mathcal{I}_{012}$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Следствие 17. Если $\{\{\xi(3/2)^i\} | i \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq [0, 1/2)$, то для $\zeta = \xi \cdot 10^{-1}$ верно $\{\{\zeta(3/2)^i\} | i \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq [0, 1/6) \cup [1/3, 2/3)$.

Следствие 18. Если не существует $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такого, что $\{\xi(3/2)^i\} | i \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq [0, 1/6) \cup [1/3, 2/3)$, то множество Z -чисел пусто.

Пусть $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ вещественное Z -слово и $\xi = u[0, :] \in \mathbb{R}$. Слово u изображено на рисунке 6. Дискретная решётка системы координат XY представлена в непрерывной форме. Отрезок OF демонстрирует целую часть числа ξ . Луч по оси X влево от F соответствует цифрам 0. Координата x крайней левой отличной от 0 цифры числа $(\frac{3}{2})^y \xi$ равна $\lfloor \log_6((\frac{3}{2})^y \xi) \rfloor \approx y \log_6 \frac{3}{2} + \log_6 \xi$. Прямая $x = y \log_6 \frac{3}{2} + \log_6 \xi$ показана как прямая FC . Не закрашенная часть рисунка выделяет фрагмент слова u , состоящий из 0. Выберем на оси X левее точки F произвольную точку $H = (x_A, 0)$. Вертикальная прямая HA пересекает прямую FC в точке $C = (x_A, \frac{1}{\log_6 \frac{3}{2}} x_A - \frac{\log_6 \xi}{\log_6 \frac{3}{2}})$. Прямая OA задана уравнением $y = x$. Прямая $O'C$ имеет вид $y = -x + c$, $c = \left(\frac{1}{\log_6 \frac{3}{2}} + 1\right) x_A - \frac{\log_6 \xi}{\log_6 \frac{3}{2}}$. Отрезок OO' обозначает столбец $u[0 : h, 0]$. AC является крайним левым столбцом на его горизонтальном уровне,

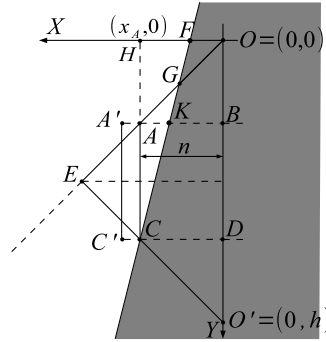


Рис. 6. Геометрическая иллюстрация необходимого условия $|AC| \leq \theta(n) \leq \eta(n)$ существования Z -чисел.

не состоящим из одних нулей. Обозначим через $A'C'$ столбец, стоящий непосредственно рядом слева от столбца AC , то есть столбец $u[x_A : h - x_A + 1, x_A + 1]$. Расстояние $|A'B|$ от $A'C'$ до OO' равно $x_A + 1$. Высота $|A'C'|$ столбца $A'C'$ равна $|HC| - x_A + O(1) = \left(\frac{1}{\log_6 \frac{3}{2}} - 1\right) x_A + O(1)$.

Столбец $A'C'$ есть результат отображения L столбца AC , расширенного сверху и снизу по одному символу. Но столбец из нулей также получается отображением L столбца из нулей, значит здесь L не является инъективным и ситуация на рисунке 6 по следствию 16 возможна, если только $|A'C'| < \theta_n$, где $n = |A'B|$.

Следствие 19. Если $\theta(n) < \left(\frac{1}{\log_6 \frac{3}{2}} - 1\right) n + O(1) \approx 3.42n$, то множество Z -чисел пусто.

Теорема 12. Множество Z -чисел пусто, если, и только если, в вертикально нетупиковых словах в $\mathcal{B}^{+\omega} \circ \mathcal{I}_{023}$ нет строк из языка $0^{+\omega} \circ \mathbb{Z}_6^*$, где \mathbb{Z}_6^* – конечные слова в алфавите \mathbb{Z}_6 .

Доказательство. Достаточность очевидна, если посмотреть на луч OG на рисунке 6. Необходимость выводится из следствия 13. \square

Следствие 20. Множество Z -чисел пусто, если биекция \mathcal{F} (следствие 12) обладает свойством: если слово $w \in \mathbb{Z}_6^{+\omega}$ начиная с некоторого момента является периодическим, то в слове $\mathcal{F}(w)$ все цифры $\{0, 2, 3, 5\}$ распределены равномерно.

Доказательство. Пусть \mathcal{F} обладает указанным свойством. Луч OG на рисунке 6 с некоторого момента состоит из одних 0, то есть периодический. Значит в луче OO' есть цифра 5. \square

1. J. Kari, J. Kopra, Cellular Automata and Powers of p/q // RAIRO - Theoretical Informatics and Applications, 2018, Volume 51, № 4, p. 191–204.
2. O. Bournez, O. Kurgansky, I. Potapov, Reachability Problems for One-Dimensional Piecewise Affine Maps // International Journal of Foundations of Computer Science, 2018, Volume 29, № 4, p. 529–549.
3. S. Akiyama, Mahler's Z -number and $3/2$ number system // Unif. Distrib. Theory, Volume 3, 2008. p. 91–99.

4. S. Akiyama, Ch. Frougny, J. Sakarovitch, Powers of rationals modulo 1 and rational base number systems // Israel J. Math., Volume 168, 2008, p. 53–91.
5. A. Dubickas, On the powers of $3/2$ and other rational numbers // Math. Nachr., Volume 281, 2008, p. 951–958.
6. L. Flatto, J.C. Lagarias, A.D. Pollington, On the range of fractional parts $\{\xi(p/q)^n\}$ // Acta Arithmetica, Volume 70, 1995, p. 125–147.
7. J. Kari, Cellular Automata, the Collatz Conjecture and Powers of $3/2$ // Developments in Language Theory, Lecture Notes in Computer Science, Volume 7410, 2012, p. 40–49.
8. J. Kari, Universal pattern generation by cellular automata // Theoretical Computer Science, Volume 429, 2012, p. 180–184.
9. K. Mahler, An unsolved problem on the powers of $3/2$ // Journal of the Australian Mathematical Society, Volume 8, 1968, p. 313–321.
10. H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann., 1916, Volume 77, p. 313–352

O. Kurgansky, I. Potapov

De Bruijn graphs and powers of $3/2$.

In this paper we consider the set $\mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ of two-way infinite words ξ over the alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ with the integer left part $\lfloor \xi \rfloor$ and the fractional right part $\{\xi\}$ separated by a radix point. For such words, the operation of multiplication by integers and division by 6 are defined as the column multiplication and division in base 6 numerical system. The paper develops a finite automata approach for analysis of sequences $(\lfloor \xi (\frac{3}{2})^n \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}}$ for the words $\xi \in \mathbb{Z}_6^{\pm\omega}$ that have some common properties with Z -numbers in Mahler's $3/2$ -problem. Such sequence of Z -words written under each other with the same digit positions in the same column is an infinite 2-dimensional word over the alphabet \mathbb{Z}_6 . The automata representation of the columns in the integer part of 2-dimensional Z -words has the nice structural properties of the de Bruijn graphs. This way provides some sufficient conditions for the emptiness of the set of Z -numbers. Our approach has been initially inspired by the proposition 2.5 in [1] where authors applies cellular automata for analysis of $(\{\xi (\frac{3}{2})^n\})_{n \in \mathbb{Z}}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Keywords: modulo 1 distribution, Z -numbers, finite automata, piecewise affine maps, De Bruijn graphs.

ГУ «ИПММ», Донецк
University of Liverpool, England
topologia@mail.ru

Получено 06.11.2018